Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2(\log_5 10 - \log_5 2) + \log_5 25 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. Determinați numărul real m pentru care $f(2+m) = 2 - m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x \cdot 2^{1-x} = 2^7$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Determinați câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea A, sunt divizibile cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,0)$ și $C(4,6)$. Determinați ecuația dreptei d ce trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x) = \operatorname{tg} x \cdot \left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2 - \cos\frac{x}{2}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y - 2z = 4 \\ ay + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 4 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 3$.

5p **b)** Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0 \geq 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$.

5p **a)** Arătați că $6 * 7 = 1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x * (x+4) = 6$.

5p **c)** Determinați tripletele (m,n,p) de numere naturale, cu $m < n < p$, pentru care $m * n * p = 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)\sqrt{x^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - 5x}{f(x)}\right)^x = 1$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3 + 1 + \ln^2 x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \ln^2 x\right)dx = 31$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-1}{x}dx=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^{e^2}\frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3}dx$. Demonstrați că $I_{n+2}+I_n\le 2^{n-1}\left(e^4-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n.