Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiințe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 2$ şi $a_2 = 1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5p **5.** Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ şi $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(2n+1, n)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n \geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 1$ calculați $2011 \circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a = -1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \circ 2^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.