Progresii aritmetice

O progresie aritmetică este definită ca fiind un șir de numere, iar acest șir de numere are formula: $a_{n+1} = a_n + r$,

dar acesta este definită și în cuvinte, de exemplu putem spune că termenul următor este egal cu termenul anterior plus rația.

Avem formula termenului general:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Această formulă poate fi folosită pentru aflarea termenului general al progresiei, dar și pentru aflarea oricărui număr necunoscut din șirul de numere.

Suma primilor n termeni ai progresei este de forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \ ;$$

sau $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Progresii geometrice

O progresie geometrică este definită ca fiind un șir de numere, iar acest șir de numere are formula: $b_{n+1} = b_n \bullet q$,

Termenul următor este egal cu termenul anterior ori rația.

Formula termenului general este: $b_n = b_1 \bullet q^{n-1}$

Suma primilor n termeni ai progresiei este de forma:

$S_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n$;

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, dacă $q \neq 1$;

sau

$S_n = n \bullet b_1$, dacă $q=1$

Exerciții

1. Fie o progresie aritmetică a_1, a_2, a_3, iar noi cunoaștem $a_1=2$ și rația $r=3$, aflați a_3.

Aici vom aplica formula termenului general , deoarece știm primul termen a_1 și rația r, și vom avea:

$a_3=a_1+(3 - 1)r=2+2r=2+2\bullet3=2+6=8$

2.Fie o progresie geometrică b_1,b_2,b_3, iar noi cunoaștem

$b_2=6$, iar rația $q=3$, aflați b_3 și b_1.

Aici vom aplica definiția progresiei geometrice, deoarece știm termenul anterior lui b_3 și rația $q=3$, și vom avea:

$b_3=b_2\bullet q=6\bullet3=18$

Pentru a afla primul termen ne vom lega de aceiași formulă.

$b_2=b_1\bullet q \Rightarrow b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{6}{3}=2$

Logaritmi

Definiție: $\boldsymbol{\log_a x = y}$ ⇔ **x= a^{y}**

Condiții de existență: a > 0

a ≠ 1

x > 0

Logaritmul zecimal este: $\log_{10} x = \lg x$

Logaritmul natural este : $\log_e x = \ln x$

Proprietățile logaritmilor:

1). $\boldsymbol{\log_a 1 = 0}$

2). $\boldsymbol{\log_a a = 1}$

3). $\boldsymbol{\log_a x^k = k \log_a x}$

4). $\boldsymbol{\log_a b + \log_a c = \log_a b \bullet c}$

5). $\boldsymbol{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}}$

Formula de schimbare a bazei :

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Monotonia funcției logaritmice

Def: f:(0;+∞) ->R, f(x)= $\log_a x$

1). Funcția este strict descrescătoare dacă: a∈(0;1)

2). Funcția este strict crescătoare dacă: a∈(1;+∞).

Monotonia funcției exponențiale

Def: f:R ->(0;+∞), f(x)= a^x

1).Funcția este strict descrescătoare dacă: a∈(0;1)

2).Funcția este strict crescătoare dacă: a∈(1;+∞).

Ecuații exponențiale

Def: a^n= a•a•……•a de n ori

Proprietății :

1). $a^0 = 1$

2). $1^n = 1$

3). $a^n \bullet a^m = a^{n+m}$

4). $a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$

5). $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6). $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

7). $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

8). $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$

Radicali

Radicalul de ordin 2 are următoarea condiție de existență:

$\sqrt{x} => x \geq 0$

Radicalul de ordin 3 nu are condiție de existență.

Proprietăți:

1). $\sqrt{a} \bullet \sqrt{b} = \sqrt{a \bullet b}$

2). $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3). $(\sqrt{a})^2 = a$

4). $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Formule de calcul prescurtat

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Tabel sin/cos/tg/ctg

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	//
ctg	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Pe lângă acest tabel putem adăuga și următoarele formule :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \bullet \cos\beta \pm \sin\beta \bullet \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \bullet \cos\beta - \sin\alpha \bullet \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \bullet \cos\beta + \sin\alpha \bullet \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Funcția de gradul 1

Def: f:R →R, f(x)=ax+b

Semnul funcției :

X	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x)		semn contrar a	0	semn a	

Rezolvăm ecuația de forma ax+b=0 și o să avem x= $-\frac{b}{a}$

Monotonia funcției de gradul 1

Dacă a > 0, atunci f este strict crescătoare

Dacă a < 0, atunci f este strict descrescătoare

Funcția de gradul 2

Def: f:R→R, f(x)= ax^2+bx+c

Ecuația de gradul 2 :

$ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Avem 3 cazuri :

1). $\Delta > 0 => x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2). $\Delta = 0 => \ x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3). $\Delta < 0 => ecuația\ nu\ are\ soluții\ reale$.

Relațiile lui Viete pentru ecuația de gradul 2 : $ax^2+bx+c=0$

S=$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; și

P=$x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$

Semnul funcției de gradul 2

$$\Delta > 0 \quad =>$$

X	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		semn a	0	semn opus lui a	0	semn a	

$$\Delta = 0 \quad =>$$

X	$-\infty$		$x_1=x_2$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$$\Delta < 0 \quad =>$$

X	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		semnul lui a	

Metode de numărare

n!=1•2•3•4•.......•n

0!=1

Aranjamente, combinări și permutări.

Aranjamente:

Def: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Combinări:

Def: $C_n^k = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$

Permutări:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Binomul lui Newton :

Def: $(a+b)^n = C_n^0 \bullet a^n + C_n^1 \bullet a^{n-1} \bullet b + C_n^2 \bullet a^{n-2} \bullet b^2 + \ldots\ldots\ldots. + C_n^{n-1} \bullet a \bullet b^{n-1} + + C_n^n \bullet b^n$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2 \ldots.. C_n^n$ =coeficienții binomiali.

Formula termenului general :

$T_{k+1} = C_n^k \bullet a^{n-k} \bullet b^k$, 0$\leq k \leq n$

Suma coeficienților binomiali:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Suma coeficienților binomiali de rang par:

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$

Suma coeficienților binomiali de rang impar:

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$

Probabilități

Formula probabilității este :

$$P=\frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ total\ posibile}$$

Formule de geometrie utile

Formula distanței:

AB=$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Coordonatele mijlocului unui segment:

M(x_m, y_m), este mijlocul segmentului AB dacă:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ecuația dreptei:

1). AB : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

2). AB: $\frac{X - X_A}{X_B - X_A} = \frac{Y - Y_A}{Y_B - Y_A}$

3). AB: y=mx+n

DE REȚINUT:

Mediatoarea unui segment este perpendiculara dusă din mijlocul segmentului;

Înălțimea este perpendiculara dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă;

Mediana este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Două drepte paralele

$d_1\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Def: $d_1 \parallel d_2 => \ m_1 = m_2$

$d_1 \parallel d_2 => \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

Două drepte perpendiculare

Def: $d_1 \perp d_2 => m_1 \bullet m_2 = -1$

$d_1 = d_2 => \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Distanța de la un punct la o dreaptă

Def: coordonatele punctului : A(x_A, x_A) și

d: ax+by+c=0

D(A,d)=$\frac{|ax_A+by_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi

Def: A(X_A, Y_A); B(X_B, Y_B); C(X_C, Y_C)

G(X_G, Y_G), este centrul de greutate al triunghiului $=>$

$X_G = \frac{X_A+X_B+X_C}{3}$ și

$Y_G = \frac{Y_A+Y_B+Y_C}{3}$

Coliniaritatea a trei puncte

Def: A,B,C coliniare $\Rightarrow$ $\Delta = 0$, unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$$

A(X_A, Y_A); B(X_B, Y_B); C(X_C, Y_C)

Aria triunghiului

Def: A(X_A, Y_A); B(X_B, Y_B); C(X_C, Y_C)

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \bullet |\Delta|$, unde : $\Delta = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$

Trigonometrie în geometrie

Teorema sinusului

$\Delta ABC = triunghi\ oarecare$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \mathbf{2}\boldsymbol{R}$$

Teorema cosinusului

$\Delta ABC = triunghi\ oarecare$

$$\mathbf{cos}\, \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{AB^2 + AC^2 - BC^2}}{\mathbf{2} \bullet \boldsymbol{AB} \bullet \boldsymbol{AC}}$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \bullet AB \bullet BC}$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \bullet BC \bullet AC}$$

Aria unui triunghi oarecare

$A_\Delta = \frac{l_1 \bullet l_2 \bullet \sin \alpha}{2}$; unde $\alpha =$ $unghiul\ format\ de\ laturile\ l_1 și\ l_2$

$$A_\Delta = \frac{b \bullet h}{2}$$

$$A_\Delta = \sqrt{p \bullet (p-a) \bullet (p-b) \bullet (p-c)}$$

Triunghi dreptunghic

Teorema lui Pitagora : $\boldsymbol{ip^2 = c_1^2 + c_2^2}$

Aria triunghiului : $\boldsymbol{A_\Delta = \frac{C_1 \bullet C_2}{2}}$

Înălțimea dusă pe ipotenuză : $\boldsymbol{h = \frac{C_1 \bullet C_2}{ip}}$

Mediana ipotenuzei : $mediană = \boldsymbol{\frac{ip}{2}}$

Funcții trigonometrice utile:

$$\sin \alpha = \frac{cateta\ opusă\ unghiului\ \alpha}{ip}$$

$$\cos \alpha = \frac{cateta\ alăturată\ unghiului\ \alpha}{ip}$$

Triunghiul echilateral

Def: Are toare laturile și unghiurile egale

Perimetrul : $P_\Delta = 3 \bullet l$

Aria triunghiului : $\boldsymbol{A_\Delta = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$

Înălțimea : $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Determinanți

Def: $detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \bullet d - b \bullet c$

Proprietăți:

det(A^t)=det(A)

det(A•B)=det(A)•det(B)

det(A^n) $= (\det A)^n$

Inversa unei matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

Pasul 1). Calculăm **det A**, dacă det A$\neq 0$ =>A este inversabilă

Daca det A=0 =>matricea nu este inversabilă

Pasul 2).Transpusa Determinăm $\boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$

Pasul 3).Adjuncta. Calculăm $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{pmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \bullet d$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \bullet b$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \bullet c$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \bullet a$

Pasul 4). Calculăm $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \bullet A^*$

Pasul 5). Verificarea - este opțională

$A \bullet A^{-1} = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Legi de compoziție

Proprietați ale legii de compoziție :

Comutativitate :

,,*’’**comutativă⇔ x*y=y*x**

Asociativitate:

,,*’’**asociativă⇔ x*(y*z)=(x*y)*z**

element neutru:

,,e’’ element neutru ⇔ x*e=e*x=x

Element simetric :

x’ element simetric ⇔ x* x’=x’ *x=e

Polinoame

Forma polinomului de gradul 3 :

$$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Relațiile lui Viete pentru polinomul de grad 3

$$S_1 = X_1 + X_2 + X_3 = \frac{-b}{a}$$

$$S_1 = X_1 \bullet X_2 + X_1 \bullet X_3 + X_3 \bullet X_2 = \frac{c}{a}$$

$$S_3 = X_1 \bullet X_2 \bullet X_3 = \frac{-d}{a}$$

Suma pătratelor rădăcinilor:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = S_1^2 - 2S_2$$

Derivate

Def : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivate simple
c'=0
x'=1
$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

Reguli de derivare
$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(a \bullet x^2)' = a \bullet (x^2)'$
$(f \bullet g)' = f' \bullet g + f \bullet g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \bullet g - f \bullet g'}{g^2}$
$(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$
$(ctg)' = -\frac{1}{sin^2 x}$
$(\sqrt{x^2 \pm a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

Ecuația tangentei

Ecuația tangentei este **:**

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Monotonia unei funcții

Monotonia functiei f(x) se studiază folosind semnul primei derivate

Dacă **f'(x)≥0** => funcția **f** este crescătoare

Dacă **f'(x)≤0** => funcția **f** este descrescătoare

Concavitatea și convexitatea

Concavitatea si convexitatea se studiază folosind semnul celei de-a doua derivate

Daca **f''(x) ≥0** => funcția **f** este convexă

Dacă **f''(x) ≤0** => funcția **f** este concavă

Asimptota orizontală, verticală și oblică

Asimptota verticală : x=a

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ = ±∞   sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ = ±∞

Asimptota orizontală : y= b

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ sau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Asimptota oblică : definiție : y=mx + n unde :

m= $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ sau   m= $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ si

n= $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ sau   n= $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$

Primitiva unei funcții

F este **o primitivă** a functiei ,,f ” ⇔

1) **F(X)=**$\int \boldsymbol{f(x)dx}$

   sau

2) F’(X)=f(X)

Integrale

Metoda integrării prin părți :

$$\int_a^b \boldsymbol{f \bullet g'\, dx = f \bullet g /_a^b - \int_a^b f' \bullet g\, dx}$$

Formula lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f\, dx = F\, /_a^b = F(b) - F(a)$$

Aria unei suprafețe plane: $A = \int_a^b |f(x)|\, dx$

Volumul unui corp de rotație :

$$V = \pi \bullet \int_a^b f^2(x) dx$$

Integrale nedefinite
$\int dx = x + C$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
$\int e^x dx = e^x$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg\ x + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$