

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 5$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $M(1,2)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,4)$, $N(0,1)$ și $P(3,0)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta MN .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în C . Arătați că $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
- 5p b) Determinați matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB = A(a) - 2I_3$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 5p a) Arătați că $2 * 0 = 2$.
- 5p b) Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a \leq b$, atunci $a * b = b$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$, unde $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.

5p c) Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.