ALGEBRĂ

Progresia aritmetică

1.Definitie

(a_n), $n \geq 1$ se numeste progresie aritmetică dacă fiecare termen al său se obține din precedentul prin adăugarea unui aceluiași numar r numit rația progresiei $(r \in R)$

1.O progresie aritmetică este bine determinată dacă se cunoaște rația r si termenul a_1

2.Pentru r=0 șirul este constant

2.Notație

- $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$

3.Formula termenului general și suma termenilor unei progresii aritmetice

$$\left.\begin{array}{l} a_1=a_1 \\ a_2=a_1+r \\ a_3=a_2+r=a_1+2r \\ a_4=a_3+r=a_1+3r \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{a_n=a_1+(n-1)r} \end{array}\right| +$$

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a_1+a_1+r+a_1+2r+\ldots+a_1+(n-2)r+a_1+(n-1)r+a_1+nr$$

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$$

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{[a_1+a_n]n}{2}$$

4.Proprietati

$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, pentru orice $k \geq 2$, formula rămâne valabilă si pentru termenii extremi egal depărtați de a_k

<u>Progresia geometrică</u>

1.Definiție

Un sir b_n cu $b_1 \neq 0$, în care fiecare termen începand cu al doilea se obține din precedentul prin înmulțire cu un număr diferit de 0 (q), se numește progresie geometrică.

q=rația progresiei geometrice

$b_{n+1} = b_n \cdot q$

2.Notație

$\div\div\, b_1, b_2, b_3 ... b_n$

3.Formula termenului general și suma termenilor unei progresii geometrice

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = b_1 \\ b_2 = b_1 \cdot q \\ b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}} \text{(formula termenului general)} \end{array}\right| +$$

$S_n = b_1 + (b_1 \cdot q) + (b_1 \cdot q^2) + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}$

$$\mathbf{S_n} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

4.Proprietați

-modulul fiecărui termen al progresiei geometrice este media geometrică a vecinilor săi: $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

-$\div\div\, b_1, b_2, b_3 ... b_n$, atunci $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_k \cdot (b_{n-k+1})$

Partea fracționară a unui număr real

1.Definiție

Prin partea fracționara a unui număr se intelege diferența dintre număr și partea lui intreagă.

$$\{a\} = a - [a]$$

2.Notație

Numărul sau expresia căreia dorim să-i aflăm partea fracționară se pune între acolade: $\{a\}$, $a \in R$

3.Proprietați

1. $\{a\} = 0 \Leftrightarrow a \in Z$
2. $\{a\} \in [0;1]$

Partea întreagă a unui număr real

1.Definiție

Fie $a \in R$, *prin partea întreagă se înțelege cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul dat.*

2.Notație

Numărul sau expresia căreia dorim să-i aflăm partea intreagă se pune între paranteze drepte: $[a]$, $a \in R$

3.Proprietați

1. $[a] \in Z$, $\forall\ a \in R$
2. $[a] = a \Leftrightarrow a \in Z$
3. $[a] \le a < [a] + 1$

Modulul unui număr real

1. *Definitie*

Modul de a este: ***a*** *dacă* ***a*** *este mai mare decât zero sau* ***-a*** *dacă* ***a*** *este mai mic decât zero.*

$$|a| = \begin{Bmatrix} a\ , & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{Bmatrix}$$

2. Proprietați

1. $|a| = max(a; -a)$, $\forall a \in R$
2. $|a| = |-a|$
3. a. $|a| \leq \alpha, \alpha \geq 0, \Leftrightarrow a \in [-\alpha; \alpha]$
   b. $|a| \geq \alpha, \alpha \geq 0 \Leftrightarrow a \in [-\infty; -\alpha] \cup [\alpha; \infty]$
4. $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$
5. $|a - b| \geq ||a| - |b||$ $\forall$ a,b$\in$R
6. a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
   b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

Inducția matematică

1.Definiție

-este folosită pentru a demonstra propoziții de forma $\forall n$, $p(n)$, $n \geq n_0$, $n \in N$

-se bazează pe principiul inducției matematice:

dacă o propozitie **p(n)** este adevărata pentru $n=n_0$ și

dacă **p(k)** este adevarată pentru n=k, $\Rightarrow$ **p(k+1)** este adevărată și pentru n=k+1 atunci **p(n)** este adevarată pentru orice $n \in N$, $n \geq n_0$.

2.Etape de rezolvare

1.Verificarea inducției matematice: se arată că **p(n_0)** este adevarată

2.Demonstrația

p(k)$\rightarrow$p(k+1)

$\rightarrow$presupunem p**(k)** adevărată(ipoteza inducției) si demonstrăm că p(k+1) este adevarată

$\rightarrow$ concluzie: din (1) si (2), pe baza inducției matematice $\Rightarrow$ **p(n)** este adevarată pentru orice $n \geq n_0$

3.Alte egalitați care se demonstrează prin inducție matematică

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Funcții

1.Definiție

$f : A \to B$, *este o functie;*

A=domeniul de definitie

B=codomenuiul (mulțimea în care funcția ia valori)

$f : A \to B,\ f(x) = \cdots$.. *(legea de corespondență)*

2.Notație

$f : A \to B$, $f(x)=y$ *(legea funcției)*

3.Operații cu funcții numerice

$f : A \to B$, $A, B \in R$, *se numește funcție numerică*

1.Adunarea

$f, g : A \to R, A \subset R$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2.Produsul

$f, g : A \to R, A \subseteq R$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3.Câtul

$f, g : A \to R, A \subseteq R$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

4.Paritate

*$A \subseteq R$, se numește mulțime simetrică dacă $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$

ex: R, Z, Q, [-1;1], {-2;0;2}

Fie $f : A \to R, A \subseteq R$, *mulțime simetrică*

*Funcția se numește – **pară** dacă* $f(-x)=f(x)$

*– **impară** dacă* $f(-x)=-f(x)$.

exemple de funcții pare: $f : R \to R$, $f(x)=|x|$, sau $f(x)=x^2$

verificare dacă $f(x)=|x|$ *este functie pară:*

$f(-x)=|-x|=|x|=f(x), \forall x \in R, \Rightarrow$ *f este funcție pară*

exemple de functii impare: $f : R \to R$, $f(x)=x^3$, $f(x)=-x$

verificare dacă $f(x)=-x$ *este funcție impară*

$f(-x)=(-x)^3=-f(x), \Rightarrow$ *f este funcție impară*

Observație:

Graficul unei funcții pare este simetric față de dreapta OY(x=0)

Graficul unei funcții impare este simetric față de origine(O)

5.Imaginea unei funcții

Fie $f : A \to B$ *, si* A' *o submulțime a lui A; Se numește imaginea mulțimii* A' *prin funcția f o submulțime a lui B notată* $f(A')$ *și egală cu ,* $f(A') = \{ f(x) / x \in A' \}$, $f(A') \subseteq B$

Exemple :

1)

x	0	1	2	3	4
f(x)	a	a	b	c	b

a) $A' = \{0;1\},\ f(A') = \{a\}$

b) $A' = \{1;2;3\},\ f(A') = \{a;b;c\}$

c) $A' = \{0;4\},\ f(A') = \{a;b\}$

2) $f : R \to R,\ f(x) = x + 2$

$A' = \{-1;0;1\} \Rightarrow f(A') = \{1;2;3\}$ *deoarece* $f(-1) = 1,\ f(0) = 2,\ f(1) = 3$

$A' = [1;3] \Rightarrow f(A') = [3;5]$

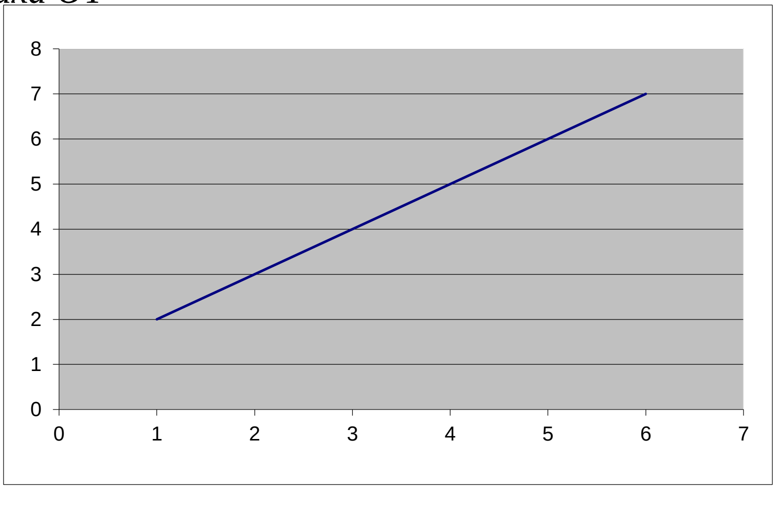
$f : R \to R$ *se numește imaginea funcției f submulțimea lui B notata Imf și egală cu: Imf*$= \{ f(x) / x \in A\}$, *Imf*$\subseteq B$

ex: $f : \{0;1;2;3\} \to \{1;2;3;4\}$

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	2	3

Imf={1 ;2 ;3}

! Pe grafic imaginea unei funcții se obține proiectând punctele graficului pe axa OY



$f : [1;6] \to R,\ f(x) = x + 1$

Imf=[2 ;7]

6.Imaginea reciprocă

Fie $f : A \to B, B' \subseteq B$

Prin imagine reciprocă a lui B' *(prin funcția f) se ințelege o submulțime a lui A notata* $f^{-1}(B') = \{x \in A / f(x) \in B'\}$

7.Funcții mărginite.Valori extreme ale unei funcții

Fie $f : A \to R, A \subseteq R$

f se numește marginită dacă există $m, M \in R$, *astfel încat :* $m \le f(x) \le M, \forall x \in A$

m,M-valori extreme

m-valoare minimă (minimul functiei)

M-valoare maximă (maximul functiei)

$x_0 \in A$ *pentru care* $f(x_0)=m$ *se numeste punct de minim*

$x_0 \in A$ *pentru care* $f(x_0)=M$ *se numeste punct de maxim*

O functie poate avea mai multe puncte de minim/maxim

8.Monotonie

$f : A \to B,\ A, B \subset R,\ I \subseteq A$

f se numește: ***strict crescătoare*** *pe I dacă oricare ar fi* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- ***crescătoare*** *pe I dacă oricare ar fi* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

- ***strict descrescătoare*** *pe I dacă oricare ar fi* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- ***descrescătoare*** *pe I dacă oricare ar fi* $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

Metoda de studiu a monotoniei

Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$

Calculăm $f(x_1)-f(x_2)$ *si stabilim semnul diferenței: + sau –*

Concluzie : $<0 \Rightarrow f$ *– strict crescătoare*

$>0 \Rightarrow f$ *– strict descrescătoare*

$\le 0 \Rightarrow f$ *– crescătoare*

$\ge 0 \Rightarrow f$ *– descrescătoare*

Monotonia funcților multiforme

$f : A \to R,\ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le a \\ f_2(x), & x > a \end{cases} \quad a \in A$

caz1. $x_1, x_2 \le a$, $x_1 < x_2$

caz2. $x_1, x_2 > a$, $x_1 < x_2$

caz3. $x_1 < a$, $x_2 > a$, $x_1 < x_2$

9.Funcții periodice

$f: A \to R, A \subset R$

f se numește periodică dacă $\forall x \in A \to T > 0$, *astfel încât* $x+T \in A$ *și* $f(x+T) = f(x)$. *T se numește perioada funcției, și dacă există un T cel mai mic cu această proprietate, T se numește perioada principală a funcției.*

1.Funcția lui Dirichlet: $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{cases}$

funcția are perioada $\forall\ t \in {Q_+}^*$

fie $x \in Q, x+t \in Q \Rightarrow f(x+t) = 1$

$f(x) = 1, \Rightarrow f(x+t) = f(x)(1)$

fie $x \notin Q, x+t \notin Q \Rightarrow f(x+t) = 0$

$f(x) = 0, f(x+t) = f(x)(2)$

Din (1) si (2) $\Rightarrow \forall x \in R, f(x+t) = f(x)$

Deoarece nu există un cel mai mic număr rațional pozitiv, funcția nu are perioadă principală.

2.Funcția parte fractionară: $f(x) = \{x\} = x - [x]$, *are ca perioadă orice număr întreg k≠ 0 pentru că:*

$$f(x+k) = \{x+k\} = x+k-[x+k]$$
$$= x+k-k-[x]$$
$$= x - [x],\ \ \forall x \in R$$

perioada principală este 1

Dacă o funcție are perioada t si $x+k \cdot t \in A, k \in R^*$ *atunci f are și perioada* $k \cdot t, k \in Z$

10.Injectivitatea funcțiilor

$f: A \to B$, *f se numește injectivă dacă* $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

la argumente distincte imaginea corespunzătoare trebuie sa fie distinctă

Obs: $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$

Definiție echivalentă cu cea de sus: o funcție este injectivă dacă și numai dacă $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Obs: f nu este injectivă $\Leftrightarrow$ *dacă* $\exists(x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2)$ *astfel încât* $f(x_1) = f(x_2)$, *pentru a arata ca o funcție nu este injectivă trebuie să găsim 2 argumente diferite care sa aibă aceași imagine*

O funcție este injectivă $\Leftrightarrow f(x) = y$ *are cel mult o soluție aparținând domeniului.*

Pe grafic o funcție este injectivă dacă orice paralelă la axa OX intersectează graficul în cel mult un punct.

11.Surjectivitatea funcțiilor

$f: A \to B$ – *surjectivă* $\Leftrightarrow \forall(y \in B), \exists(x \in A)$, *astfel încât* $f(x) = y$

f este surjectivă dacă și numai dacă Imf=B

f nu este surjectivă dacă și numai dacă $\exists(y \in B)$, *astfel încât* $\forall\ (x \in A), f(x) \neq y$

Limbajul ecuaților: f este surjectivă dacă f(x)=y are cel puțin o soluție.

Pe grafic f este surjectivă dacă orice paralelă la axa OX prin punctele codomeniului să intersecteze graficul în cel puțin un punct.

12.Bijectivitate

$f: A \to B$ *se numește bijectivă dacă și numai dacă f este și injectivă și bijectivă.*

$\forall(y \in B), \exists!$*(exista un unic element* $x \in A$*) astfel încât* $f(x) = y$

f este bijectivă $\Leftrightarrow$ $f(x) = y$ *și* $f(x) = y$ *are o singură soluție*

f nu este injectivă dacă și numai dacă f nu este injectivă și/sau surjectivă.

13.Funcția inversă

Fie $f: A \to B$, *bijectivă*

Spunem că f admite inversă dacă $\exists(g: B \to A)$ *astfel încât dacă* $, f(x) = y \Longrightarrow\ g(y) = x$

g se notează cu f^{-1}*- se numește inversa funcției*

Dacă f admite inversă se numaste inversabilă; f este inversabilă $\Leftrightarrow$*f este bijectivă.*

Ex:

Fie $f: (-\infty;0) \to [0;\infty), f(x) = x^2$

1.Studiul injectivității:

$x_1, x_2 \in (-\infty;0], f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x_1| = |x_2| \\ x_1, x_2 \in (-\infty;0] \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ este injectivă(1);}$$

2.Studiul surjectivitații:

$\forall(y \in [0;\infty)), \exists(x \in (-\infty;0))$ *astfel încât* $f(x) = y$

fie $y[0;\infty)$, $f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = -\sqrt{y} \in (-\infty;0) \Rightarrow$*f este surjectivă(2);*

Din (1) si (2) $\Rightarrow$*f este bijectivă*$\Rightarrow$*f admite inversă*$\Rightarrow$ $f^{-1}: [0;\infty) \to (-\infty;0)$ *este inversa funcției f*$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

14.Compunerea functiilor

$f: A \to B, g: C \to D$

Prin compusa funcției g cu f în această ordine se înțelege o funcție notată cu $g \circ f: A \to D,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f(A) \subseteq C$

Imf$\subseteq C$

! $g \circ f \neq f \circ g$

elementul neutru în raport cu compunerea funcțiilor este funcția identică;
dacă compunem o funcție cu inversa sa obținem funcția identică.

a)Compunere și paritate:

1.dacă f,g sunt pare atunci $g \circ f$ *este pară*

2.dacă f,g sunt impare atunci $g \circ f$ *este pară*

3.dacă f,g au parități diferite atunci $g \circ f$ *este pară*

b)Compunere și monotonie:

1.dacă f,g au aceeași monotonie atunci $g \circ f$ *este crescatoare*

2.dacă f,g au monotonie diferită atunci $g \circ f$ *este descrescatoare*

c)Compunere, injectivitate, surjectivitate si bijectivitate:

1.dacă f,g sunt bijective atunci $g \circ f$ *este bijectivă si* ($g \circ f$)= $f^{-1} \circ g^{-1}$

2.dacă $g \circ f$ *este injectivă atunci f este injectivă*

3.dacă $g \circ f$ *este surjectivă atunci g este surjectivă*

4.dacă $g \circ f$ *este bijectivă atunci g este surjectivă și f este injectivă*

Compunerea funcțiilor prin acoladă

$$f, g : R \to R$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, x \ge 3 \\ 2x + 3, x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 3x, x < 0 \\ 4x + 5, x \ge 0 \end{cases}$$

$$f \circ g : R \to R$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} g(x) - 2, g(x) \ge 3 \\ 2g(x) + 3, g(x) < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - 3x - 2; 1 - 3x \ge 3, x < 0 \\ 4x + 5 - 2; 4x + 5 \ge 3, x \ge 0 \\ 2(1 - 3x) + 3; 1 - 3x < 3, x < 0 \\ 2(4x + 5) + 3; 4x + 5 < 3, x \ge 0 \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} 1 - 3x \ge 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{2}{3}; 0)$$

$$2)\begin{cases} 4x + 5 \ge 3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; \infty)$$

$$3)\begin{cases} 1 - 3x < 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{2}{3})$$

$$4)\begin{cases} 4x + 5 < 3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \phi$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -6x+5; x \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \\ -3x-1; x \in [-\frac{2}{3}; 0) \\ 4x+3; x \in [0; \infty) \end{cases}$$

Funcția de gradul I

f:R→R, f(x)=ax+b

Definitie:

Dacă a,b sunt numere reale f se numește functie afină;
Dacă $a \neq 0$ *f se numeste funcție de gradul I ;*
Dacă $b \neq 0$ *f se numeste funcție constantă(* $a=0$, $b \neq 0$ *) ;*
Dacă $b=0$ *f se numeste funcție liniară.*

Proprietăti:

1)Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	*semn contrar lui a*	*0*	*semnul lui a*

2)Monotonia funcției de gradul I

Fie $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = a(\underbrace{x_1 - x_2}_{<0}) \Rightarrow a < 0 \Rightarrow f - \textit{strict descrescatoare}$$

$$a > 0 \Rightarrow f - \textit{strict crescatoare}$$

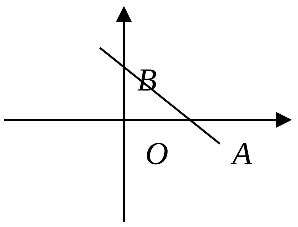
3)Graficul funcției de gradul I

Graficul funcției este o dreaptă

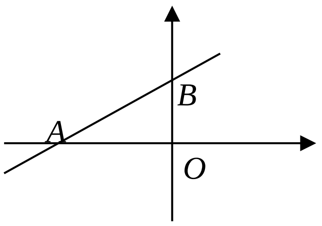
$$Gf \cap OX \Rightarrow A(-\frac{b}{a};0)$$

$$Gf \cap OY \Rightarrow B(0;b)$$

Dacă a<0 atunci panta dreptei AB este negativă



Dacă a>0 atunci panta dreptei AB este pozitivă



Ecuatii si sisteme de ecuatii rezolvate cu ajutorul semnului functiei de gradul I

Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x(x-3)} < 0 \\ x(x+1)(x+2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{x(x-3)} < 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \qquad x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \textit{ sau } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$ *0* *2* *3* $+\infty$
x-2	- - - - - - - - - - - - *0* + + + + + + +

x	- - - - - - *0* + + + + + + + + + + +
x-3	- - - - - - - - - - - - - - - - *0* + + + +
x(x-3)	+ + + + *0* - - - - - - - - - *0* + + + +
E(x)	- - - - - - / + + + *0* - - - - / + + + +

$S_1 = (-\infty;0) \cup (2;3)$

$x(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; sau \;\; x = -1 \;\; sau \;\; x = -2$

x	$-\infty$ -2 -1 0 $+\infty$
x	- - - - - - - - - - - - - - - - *0* + + + +
x+1	- - - - - - - - - - - - *0* + + + + + + +
x+2	- - - - - - *0* + + + + + + + + + + +
E(x)	- - - - - - *0* + + + *0*- - - *0* + + + +

$S_2 = [-2;-1] \cup [0;+\infty] \Rightarrow \;\; S_{final} = S_1 \cap S_2 = (2;3) \cup [-2;-1]$

Funcţia de gradul II

1)Def:

f:R→R , f(x)=ax ²+bx+c , a,b∈R , a≠0 se numeşte funcţie de grad II
Ecuaţia ax ²+bx+c=0 , a≠0 se numeşte ecuaţie ataşată funcţiei de grad II

$\Delta = b^2 - 4ac$ *discriminantul ecuaţiei*

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & x_1, x_2 \in \Re \quad x_1 \neq x_2 \\ \Delta = 0 & x_1, x_2 \in \Re \quad x_1 = x_2 \\ \Delta < 0 & x_1, x_2 \notin \Re \end{cases}$$

2)Forma canonică:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}\right]$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \textit{forma canonică}$$

3)Mărginire, valori extreme

Caz 1:Pentru a>0 funcţia de gradul II este mărginită inferior.

Valoarea minimă este $y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$ *şi se obţine pentru* $x_{\min} = \frac{-b}{2a}$

$\Rightarrow$ *pentru a>0 f admite minim*

Caz 2: Pentru a< 0 funcţia de gradul II este mărginită superior.

Valoarea maximă este $y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$ *şi se obţine pentru* $x_{\max} = \frac{-b}{2a}$

$\Rightarrow$ *pentru a< 0 f admite maxim*

4)Graficul funcţiei de gradul II:

Reprezentarea grafică a funcţiei de grad II este o parabolă cu braţele în sus pentru a>0 sau cu braţele în jos pentru a<0

Etapele reprezentarii grafice:

1)Intersecţia cu axele:

$Gf \cap Ox:\ \ y = 0$

$f(x) = 0$

a) $\Delta > 0 \quad x_1, x_2 \in \Re \quad x_1 \neq x_2$

$A(x_1, 0) \quad B(x_2, 0)$

b) $\Delta = 0 \quad A(x_1, 0)$

c) $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad Gf \cap Ox = \phi$

$Gf \cap Oy:\ \ x = 0$

$C(0, c)$

2)Calculul vârfului:

$$V\left(\frac{-b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

3)Axa de simetrie

$$x=-\frac{b}{2a}$$

4)(Facultativă) - *calculul altor puncte*

5)Trasarea graficului

5)Monotonia functiei de gradul II:

Pentru a> 0 funcţia de gradul II este:

strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$

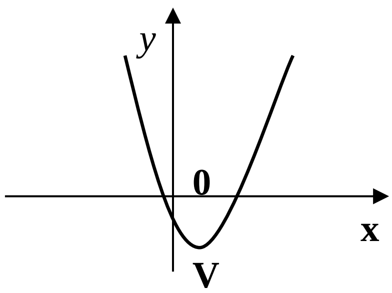
Pentru a< 0 funcţia de gradul II este:

strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

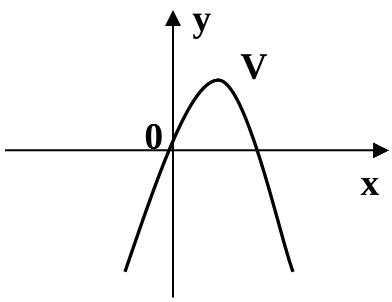
strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$

6)Imaginea funcției de gradul II:

dacă a> 0 $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\Delta}{4a};+\infty\right)$



dacă a< 0 $\operatorname{Im} f=\left(-\infty;-\frac{\Delta}{4a}\right]$



7)Tabel de variație :

1) a> 0

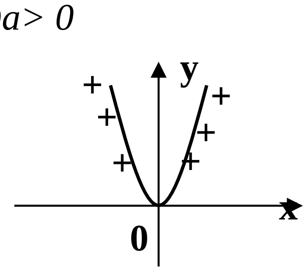
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x) = ax² + bx + c	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗

2) a< 0

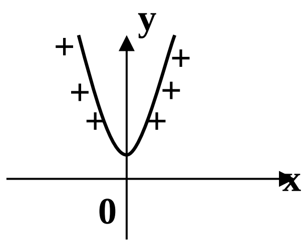
X	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x) = ax² + bx + c	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘

8)Semnul funcției de gradul II

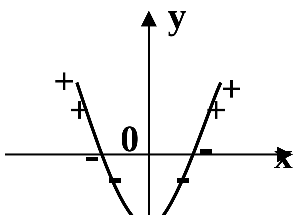
1)a> 0



$\Delta = 0$

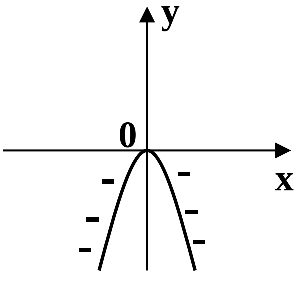


$\Delta < 0$

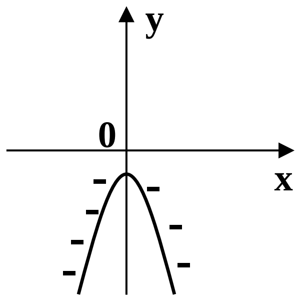


$\Delta > 0$

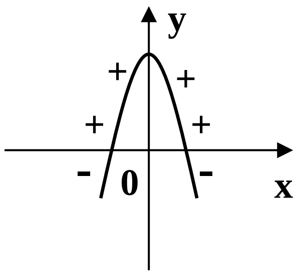
2)a< 0



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$



$\Delta > 0$

Caz 1: $\Delta < 0$

x	- ∞ +∞
f(x)	*semnul lui a*

Caz 2: $\Delta = 0$

x	- ∞	$-\frac{b}{2a}$	+ ∞
f(x)	*semnul lui a*	*0*	*semnul lui a*

Caz 3: $\Delta > 0$

x	- ∞	x_1		x_2	+ ∞
f(x)	*semnul lui a*	*0*	*semn contrar lui a*	*0*	*semnul lui a*

9)Rezolvarea inecuaților și sistemelor de ecuații:

1) Aflaţi x:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2+4x+9} \le 0 = E(x) \\ x^2-6x+9>0 \end{cases}$$

$$x^2-9=0 \qquad\qquad x^2+4x+9=0$$

$$x=\pm 3 \qquad\qquad \Delta = 16-36<0$$

$\Rightarrow$ *ecuaţia nu are rădăcini reale*

$$x^2-6x+9>0$$

$$\Delta = 36-36$$

$$\Delta = 0 \qquad \Rightarrow \quad x=3$$

x	- ∞	-3		3	+ ∞
x^2-9	+ + + + +	*0*	- - - - - - - - -	*0*	+ + + + + + +
x^2+4x+9	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +				
E(x)	+ + + + +	*0*	- - - - - - - - -	*0*	+ + + + + + +
x^2-6x+9	+ + + + + + + + + + + +			*0*	+ + + + + + +

$$\begin{cases} x \in [-3;3] \\ x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty) \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [-3;3)}$$

2) Determinaţi $m \in \Re$, $m \neq 0$ *astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei* $f(x) = (m-2)x^2 - (3m+2)x + m + 1$ *să fie situat sub axa Ox.*

$$-\frac{\Delta}{4a} < 0 \quad = E(m)$$

$$\Delta = (3m+2)^2 - 4(m-2)(m+1)$$

$$\Delta = 9m^2 + 12m + 4 - 4m^2 + 4m + 8$$

$$\Delta = 5m^2 + 16m + 12$$

$$5m^2 + 16m + 12 = 0$$

$$\Delta_m = 256 - 240$$

$$\Delta_m = 16$$

$$m_1 = \frac{-16+4}{10} \qquad m_2 = \frac{-16-4}{10}$$

$$m_1 = -\frac{6}{5} \qquad m_2 = -2$$

$$-4a = -4m + 8$$

$$-4m + 8 = 0$$

$$4m = 8$$

$$m = 2$$

m	**- ∞ -2 -6/5 2 + ∞**
$5m^2 + 1m + 12$	+ + + + + + *0* - - - - - *0* + + + + + + + + + + +
$-4m + 8$	+ + + + + + + + + + + + + + + *0* - - - - - - - -
E(m)	+ + + + + + *0* - - - - - *0* + + + + / - - - - - - - -

$$\Rightarrow \; m \in \left(-2; -\frac{6}{5}\right) \cup (2; +\infty)$$

10)Familii de parabole:

Fie familia de parabole asociată funcţiei:

$$f_m : \Re \to \Re \qquad f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 2 \qquad m \neq -1$$

a) Arătaţi că parabolele P_m *asociate funcţiei* f_m *trec printr-un punct fix.*

$$f_m(x) = mx^2 + x^2 - 2mx - 4x + m + 2$$

$$f_m(x) = mx^2 - 2mx + m + x^2 - 4x + 2$$

$$f_m(x) = m(x^2 - 2x + 1) + x^2 - 4x + 2$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f_m(1)=1-4+2 \\ f_m(1)=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad A(1;-1)$$ *- punct fix*

<u>Obs: Pentru a determina punctul fix prin care trec toate parabolele, se grupează după m şi se impune coeficientul=0.</u>

b) Să se arate că vârfurile acestor parabole se află pe dreapta <u>y+x=0</u>.

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m+1)$$

$$\Delta = 4m^2 + 16m + 16 - 4m^2 - 4m - 8m - 8$$

$$\Delta = 4m+8$$

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{4(m+2)}{4(m+1)} = -\dfrac{m+2}{m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow y=-x$$

$$\Downarrow$$

$$x+y=0$$

$\Rightarrow$ *Varful parabolelor se află pe dreapta* $x+y=0$ *(a 2-a bisectoare).*

<u>Obs: Pentru a determina locul geometric al vârfurilor parabolelor se elimină parametrul m din relaţiile:</u>

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

m	*- ∞ **-2** **-1** + ∞*
m+2	- - - - - - - - *0* + + + + + + + + + +
m+1	- - - - - - - - - - - - - - - *0* + + + + + +
E(m)	+ + + + + *0* - - - - - / + + + + + +

$\Rightarrow$ $m \in (-2;-1)$

<u>11)Relatiile lui Viéte:</u>

1)Formula pe jumătate:

$$ax^2+bx+c=0$$

dacă b – nr par $\Rightarrow$ $\underline{b = 2 \cdot b'}$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

2)Relaţiile Viéte ataşate ecuaţiei de grad II(relaţiile între rădăcinile ecuaţiei şi coeficienţi)

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\rightarrow$ suma rădăcinilor

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ $\rightarrow$ produsul rădăcinilor

12)Suma puterilor asemenea a rădăcinilor ecuaţiei de gradul II:

$S_n = x_1^n + x_2^n \qquad n \in N, n \geq 2$

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$= S(S^2 - 2P - P)$

$= S(S^2 - 3P)$

$= S^3 - 3SP$

$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$

3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$

$= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

$x_1^4 + x_2^4 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$

x_1, x_2 $\rightarrow$ *rădăcini ale ecuaţiei* $\Rightarrow \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 & \Big| \cdot x_1^{n-2} \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 & \Big| \cdot x_2^{n-2} \end{cases}$

$\begin{cases} ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0 \\ ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot S_n + b \cdot S_{n-1} + c \cdot S_{n-2} = 0, n \geq 3$

13)Formarea ecuatiei de gradul II (când cunoaştem rădăcinile):

Teorema:

Fie $x_1, x_2 \in R,\ S = x_1 + x_2,\ P = x_1 \cdot x_2$

Atunci x_1, x_2 *sunt rădăcini ale ecuaţiei*

$x^2 - Sx + P = 0$

Nr. x_1, x_2 *există* $\Leftrightarrow S^2 - 4P > 0$.

14)Natura și semnele rădăcinilor ecuației de gradul II:

Pentru a stabili natura rădăcinilor(reale sau nu) se stabileşte semnul lui Δ.

$\Delta > 0 \quad \rightarrow$ *rădăcini reale*

$\Delta < 0 \quad \rightarrow$ *rădăcini nereale*

Δ	**P**	**S**	x_1, x_2
+	+	+	$x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0$
+	+	-	$x_1 < 0\ ,\ x_2 < 0$
+	-	+	$x_1 < 0\ ,\ x_2 > 0 \quad x_2 > \lvert x_1 \rvert$
+	-	-	$x_1 < 0\ ,\ x_2 > 0 \quad x_2 < \lvert x_1 \rvert$
+	*0*	+	$x_1 = 0\ ,\ x_2 > 0$
+	*0*	-	$x_1 = 0\ ,\ x_2 < 0$
+	-	*0*	$x_1 = -x_2\ ,\ x_1 > 0\ ,\ x_2 < 0$

Obs:

1) $\begin{cases} P > 0 \Rightarrow & x_1, x_2 \text{ au acelaşi semn} \\ P < 0 \Rightarrow & x_1, x_2 \text{ au semne contrare} \end{cases}$

2) problema semnului se pune $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

15)Ecuații cu rădăcini comune:

Obs:

1) Două ecuaţii de grad II $\begin{matrix} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 & a_1 \neq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 & a_2 \neq 0 \end{matrix}$

au aceleaşi rădăcini $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

2) Două ecuaţii de grad II au o rădăcină comună $\Leftrightarrow$

fie $\boldsymbol{\alpha}$ *o rădăcină comună* $\Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0 & \cdot a_2 \\ a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0 & \cdot(-a_1) \end{array}$

$$\begin{array}{l|l} a_1a_2\alpha^2 + b_1a_2\alpha + c_1a_2 = 0 & \\ -a_1a_2\alpha^2 - b_2a_1\alpha - a_1c_2 = 0 & + \\ \hline / \qquad \alpha(b_1a_2 - a_1b_2) + a_2c_1 - a_1c_2 = 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \ \alpha = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1a_2 - a_1b_2} \quad , \ b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ *două ecuaţii de grad II au o rădăcină comună*

$\Leftrightarrow \ \alpha = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1a_2 - a_1b_2}$ *verifică relaţiile 1 şi 2 unde* $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$

<u>16)Poziţile rădăcinilor de gradul II faţa de un parametru:</u>

$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$

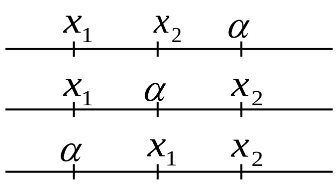
x_1, x_2 *rădăcinile ecuaţiei*

$\alpha \in \Re$

Caz 1: $x_1 \leq x_2 \leq \alpha$

Caz 2: $x_1 \leq \alpha \leq x_2$

Caz 3: $\alpha \leq x_1 \leq x_2$



<u>Metoda 1</u>: (cu relaţiile Viéte)

Caz I: $\begin{cases} x_1 \leq \alpha \\ x_2 \leq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \alpha \leq 0 \\ x_2 - \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ y_1y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 < 0 \end{cases}$$

Caz 2: $x_1 < \alpha < x_2$

$x_1 - \alpha < 0$

$x_2 - \alpha > 0$

$$\begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

Caz 3: $\alpha < x_1 < x_2$

$\alpha - x_1 < 0$

$\alpha - x_2 < 0$

$\begin{cases} -y_1 < 0 \\ -y_2 < 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_1 > 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Metoda 2:

Se consideră f:R→R $f(x) = ax^2 + bx + c$

Obs:

$a \cdot f(\alpha) < 0$ $\Leftrightarrow$ ***α*** *se află între rădăcini*

$f(\alpha)$ *are semn contrar lui a*

$a \cdot f(\alpha) > 0$ $\Leftrightarrow$ ***α*** *se află în afara rădăcinilor*

Caz 1: $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha \end{cases}$$

Caz 2: $x_1 < \alpha < x_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \end{cases}$$

Caz 3: $\alpha < x_1 < x_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha).0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha \end{cases}$$

<u>17)Poziția rădăcinilor ecuației de gradul II fața de doi parametri:</u>

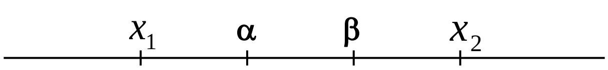
Fie ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ *cu rădăcinile* x_1, x_2; $\alpha, \beta \in \Re$

1)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \beta \end{cases}$$

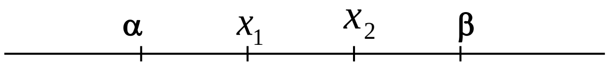
2)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$



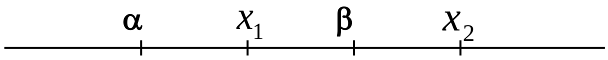
3)

$$\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a} < \beta\end{cases}$$



4)

$$\begin{cases}\Delta > 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \\ \alpha < -\dfrac{b}{2a}\end{cases}$$



Obs:

Condiţia ca o ecuaţie de grad II să aibă o singură rădăcină în intervalul ***(α,β)*** *este ca* $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

18)Sisteme de ecuații:

1)Sisteme formate din o ecuație de grad I și o ecuație de grad II de forma:

$$\begin{cases}y = mx + n \\ y = ax^2 + bx + c\end{cases}$$

Interpretatre geometrică :

Ecuaţia 1 se reprezintă grafic printr-o dreaptă.
Ecuaţia 2 se reprezintă grafic printr-o parabolă.

A rezolva sistemul înseamnă a determina punctele de intersecţie dintre dreaptă şi parabolă. Dreapta poate fi tangentă parabolei, secantă sau dreaptă exterioară.

Etapele rezolvării sistemelor:

1)Se exprimă o necunoscută din ecuaţia 1 în funcţie de cealaltă (care are coeficientul mai mic).
2)Se înlocuieşte în ecuaţia 2.
3)Se rezolvă ecuaţia de grad II obţinută.
4)Se află şi cealaltă necunoscută.

2)Sisteme simetrice:

Def:

O ecuaţie se numeşte simetrică dacă înlocuind x cu y sau y cu x ecuaţia nu se schimbă.

Un sistem se numeşte simetric dacă e format din două ecuaţii simetrice.

Obs:

Dacă $(x_0;y_0)$ *e soluţia sistemului, atunci şi* $(y_0;x_0)$ *e soluţia sistemului.*

<u>Metoda de rezolvare:</u>

1)Se notează x+y=S şi xy=P.

2)Se transcrie sistemul în S şi P şi se rezolvă.

3)Se ataşează ecuaţia de grad II $t^2-St+P=0$ *şi se rezolvă* $\Rightarrow$ t_1,t_2

4)Soluţiile vor fi $\underline{t_1,t_2}$ *şi* $\underline{t_2,t_1}$.

<u>3)Sisteme omogene de forma:</u> $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

<u>Metoda de rezolvare:</u>

$d=d'=0$

- *sistemul admite soluţie banală*
- *pentru a determina şi alte soluţii, împărţim cu* x^2 *(x≠0) sau cu* y^2 *(y≠0) una din ecuaţii.*
- *notăm* $\frac{y}{x}$ *(x≠0)= t sau* $\frac{x}{y}$ *(y≠0)= t şi rezolvăm ecuaţia de grad II obţinută.*
- *revenim la notaţie şi rezolvăm sistemul format din*

$$\begin{cases} \frac{y}{x}=t_1 \\ cealaltă \quad ec. \quad a \quad sist. \end{cases} \quad şi \quad \begin{cases} \frac{y}{x}=t_2 \\ cealaltă \quad ec. \quad a \quad sist. \end{cases}$$

- *sistemul admite soluţia banală (0;0)*
- *căutăm şi alte soluţii*